Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Exercice 1

1) Etude d'une famille de fonctions

On considère les fonctions f_α , où α est un réel fixé, définies par :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \frac{\alpha x}{1+x} - \ln(1+x)$$

a) Etudier les variations des fonctions f_α sur $]-1,+\infty[$. On précisera les limites de f_α aux bornes de l'intervalle $]-1,+\infty[$.

b) Déterminer les fonctions f_α admettant un extremum local, et étudier le signe de f_α en ce point.

c) Déterminer le nombre de solutions $x > -1$ de l'équation $f_\alpha(x) = 0$.

2) Etude d'une fonction particulière

On pose désormais $f = f_2$, soit : $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b sur $]-1,+\infty[$, vérifiant : $-1 < a < b$.
Donner une valeur approchée de b à 10^{-2} près.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement une solution $c > -1$.

c) Montrer que : $\forall x > -1$, $f(x) \leq x$.

3) Etude d'une suite récurrente

On considère la suite récurrente $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]-1,+\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2u_n}{1+u_n} - \ln(1+u_n) \end{cases}$$

a) On pose $I = [0,1]$. Montrer que I est stable par f.

b) Soit $u_0 \in I$ fixé. Montrer que la suite u est bien définie, et que $\forall n \geq 0$, $u_n \in I$.

c) Montrer que la suite u est monotone.

d) Démontrer que la suite u converge vers une limite ℓ.

e) Déterminer la valeur de ℓ.

4) Etude d'une série numérique

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)$.

a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \leq f\left(\frac{1}{k}\right)$

c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$?

5) Etude d'une nouvelle fonction

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall t \neq 0,\ \varphi(t) = \dfrac{1}{t}\ln(1+t^2) \end{cases}$

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $t \neq 0$, exprimer $\varphi'(t)$ à l'aide de la fonction f.

c) Soit Φ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.

i) Quel est le domaine de définition de Φ ?

ii) Montrer que Φ est paire.

d) **i)** Soit $x \in [1, +\infty[$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{2}{t}\ln t\mathrm{d}t$.

ii) En déduire : $\forall x \geq 1,\ \Phi(x) - \Phi(1) = (\ln x)^2 + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

iii) Justifier rapidement l'inégalité : $\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \leq x$, et en déduire :

$$\forall x \geq 1,\ 0 \leq \int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \leq 1$$

e) Donner un équivalent simple de $\Phi(x)$ en $+\infty$.

f) Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$?

Exercice 2

1) Recherche du Développement en Série de Fourier d'une fonction à l'aide de séries entières

Dans tout l'exercice on désigne par f l'application définie par

$$f(x) = \frac{1}{8\cos x - 17}$$

a) Justifier rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) On pose $X = e^{ix}$. Montrer qu'il existe une fonction rationnelle F telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F(X)$$

On rappelle qu'une fonction rationnelle est un rapport de deux fonctions polynômes.

c) On considère F la fonction rationnelle déterminée à la question précédente. On note $D(F)$ le domaine de définition de F, avec $D(F) \subset \mathbb{C}$. Déterminer $(a, b, r_1, r_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\forall z \in D(F),\ F(z) = \frac{a}{r_1 - z} + \frac{b}{r_2 - z}$$

d) Montrer qu'il existe deux séries entières S_1 et S_2 de rayon de convergence $R > \pi$, telles que :

$$\text{si} \quad \frac{1}{R} < |z| < R, \quad F(z) = S_1(z) + S_2(z^{-1})$$

e) A partir de la décomposition précédente, déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nx)$$

f) Etudier la convergence de la série de Fourier de f et préciser la valeur de la somme.
On ne demande pas de calculer explicitement la série de Fourier de f.

g) D'après la question **1.e)**, quelle hypothèse peut-on émettre sur l'expression des coefficients de la série de Fourier de f ?
On ne demande pas de vérifier cette hypothèse, c'est l'objectif de la suite du problème.

2) Propriétés des coefficients de Fourier

Pour tout entier naturel n on note : $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$

a) Calculer a_0. On utilisera le changement de variable : $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t = \tan\dfrac{x}{2}$.
Exprimer a_1 à l'aide de a_0 et d'une intégrale très simple à calculer, puis déterminer la valeur de a_1.

b) Simplifier l'expression $4\cos(nx) + 4\cos\big[(n+2)x\big]$ en faisant apparaître $\cos\big[(n+1)x\big]$.
En déduire une expression de

$$4\cos(nx) + 4\cos\big[(n+2)x\big] - 17\cos\big[(n+1)x\big]$$

en fonction de $\cos\big[(n+1)x\big]$et $\cos x$.
En déduire une relation de récurrence liant a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

c) En posant $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$.

d) Montrer que $M = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et en déduire une expression de X_n en fonction de n.

e) L'hypothèse de la question **1.g)** est-elle vérifiée ?

3) Calcul de sommes numériques

a) A l'aide de la série de Fourier de f calculer les sommes numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n$$

b) Vérifier les résultats précédents à l'aide de séries entières ou numériques de référence.

Problème

On rappelle que si on a $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme avec $a_d \neq 0$, alors d est le degré de P et a_d est le coefficient dominant de P.
Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé dans tout le problème. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe $\phi(P)$ donné par

$$\phi(P) = P'' - 2XP'$$

Partie I. Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Ecrire sa matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) *On diagonalise ici l'endomorphisme ϕ.*

a) Montrer que ϕ est diagonalisable. Donner les valeurs propres de ϕ.

b) En déduire que pour tout entier $p \in \{0, \ldots, n\}$, il existe un unique polynôme H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaire, tel que

$$\phi(H_p) = -2pH_p \quad (*)$$

4) On se place (*uniquement dans cette question*) dans le cas particulier $n = 3$.
Ecrire la matrice M dans ce cas particulier, et donner alors H_0, H_1, H_2 et H_3.

5) Soit $p \in \{0, \ldots, n\}$. Notons $d = \deg(H_p)$.
En écrivant $H_p = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k + X^d$, et en utilisant $(*)$, montrer que

$$\deg(H_p) = p, \quad a_{p-1} = 0, \quad a_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{4}$$

Partie II. Une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$< P, Q >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

1) Montrer que $< . , . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) **a)** Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer la dérivée de $x \mapsto P'(x)e^{-x^2}$.
Montrer que

$$< \phi(P), Q >= - < P', Q' >$$

b) En déduire que pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$< \phi(P), Q >=< P, \phi(Q) >$$

c) Quelle est la nature de l'endomorphisme ϕ dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], < . , . >)$?

3) *Une base orthogonale de l'espace euclidien* $(\mathbb{R}_n[X], <.,.>)$.

a) Soient p et q deux entiers dans $\{0,\dots,n\}$. Déduire de **II.2b** que :

$$(p \neq q) \Rightarrow < H_p, H_q >= 0$$

b) En déduire que $(H_0,\dots,H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Soit $p \in \{1,\dots,n\}$. Montrer que $H_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^{\perp}$.

Partie III. Quelques propriétés des polynômes H_p.

1) *On établit ici une relation de récurrence sur les polynômes H_p.*
Soit $p \in \{0,\dots,n\}$.

a) Soient P, Q, R trois polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$< PQ, R >=< P, QR >$$

b) On suppose $p \geqslant 2$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, on a

$$< XH_p, Q >= 0, \quad \text{puis} \quad < H_{p+1} - XH_p, Q >= 0$$

c) Justifier l'existence d'un $p+1$-uplet $(\alpha_0,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que

$$H_{p+1} - XH_p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k H_k$$

d) En utilisant **I.5** et **III.1b**, montrer que :

$$\forall p \in \{1,\dots,n\},\ 2H_{p+1} - 2XH_p + pH_{p-1} = 0$$

2) Montrer alors que si p est pair, alors H_p est pair, et que si p est impair, alors H_p est impair.

3) *On calcule ici la dérivée de H_p.*

a) Soit $p \in \{2,\dots,n\}$. Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, $< H_p', Q >= 0$.

b) En déduire, en décomposant H_p' suivant la base $(H_0,\dots,H_n)$, que

$$\forall p \in \{1,\dots,n\},\ H_p' = pH_{p-1}$$

4) On pose $U_0 = 1$, et pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$:

$$U_p(x) = \exp(x^2)\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}[\exp(-x^2)]$$

a) Montrer que U_p est un polynôme de degré p. Calculer son coefficient dominant.

b) Calculer $U_p'(x)$ et $U_p''(x)$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}[\exp(-x^2)]$, $i \in \{p, p+1, p+2\}$.

c) En déduire que

$$H_p = \frac{(-1)^p}{2^p} U_p$$

Fin de l'énoncé